ISSN (online): 2534-8957; ISSN (print): 0861-9344; http://unwe-research-papers.org/

АНАЛИЗЪТ НА ПЛАТЕЖНАТА МАТРИЦА В ИГРА СРЕЩУ НЕУТРАЛЕН ПРОТИВНИК

Георги Киранчев[1]
e-mail: g.kiranchev@unwe.bg

Резюме

В студията се разглежда темата за игра срещу неутрален (неразумен) противник и оценяването на неговата смесена стратегия. Целта е да се докаже важността на това, в подобни игри акцентът да пада именно върху анализа на платежната матрица. Задачата е демонстриране възможностите на анализа на платежната матрица при избора на оптимална стратегия срещу неутрален противник.

Използвана е методологията на математическото доказателство и проверката на статистически хипотези. Доказано е, че е достатъчно вероятностите да попадат в границите, в които са изпълнени условията за доминация. Доказано е, че анализът на платежната матрица дава информация за границите, в които емпирично получените вероятности на състоянията са надеждни оценки на истинските вероятности. Оценени са източниците за получаване на смесената стратегия на противника. Разгледано е използването на аналитично получените граници за оценяване на емпирично получени вероятности с инструментариума на проверката на статистически хипотези. Подходът е препоръчителен при избор на стратегия в ситуации, в които промяната на стратегията впоследствие или е невъзможна, или струва твърде скъпо.

Предлаганият анализ има висока практическата полезност за всички лица, взимащи стратегически решения в условията на игра срещу неутрален противник. Изводът е че само на основата на този анализ може да се избере оптимална стратегия, нечувствителна към неточността смесената стратегия на противника.

Ключови думи: теория на игрите, игри, смесена стратегия, оптимална стратегия

JEL: C72, C73

Увод

В студията се разглежда темата за игра срещу неутрален (неразумен) противник, за източниците на получаване на неговата смесена стратегия и оценката на тази смесена стратегия от позициите на аналитично получени граници.

---

[1] Доцент, доктор, катедра „Маркетинг и стратегическо планиране“, факултет „Управление и администрация“, УНСС

Съществуващият проблем при подобни игри е, че обикновено смесената стратегия на противника не е точно известна, а е получена в резултат било на експертни оценки, било на оценки, получени от някаква извадка, когато това изобщо е възможно. Този проблем изобщо не е разглеждан в литературата, поради което и степента на неговата изученост е нулева до публикуването на тази студия.

Тематиката е неизследвана и няма предложени решения, защото проблемът остава незабелязан до този момент. В литературата се приема априорно, че смесената стратегия на противника е известна или че може да бъде известна точно. Проблемът за неточността на определянето и за вариативността на тази стратегия в някакви граници не е разглеждан, защото прави неприложим апарата за взимане на решения, който се предлага.

Изследването е ограничено в рамките на игра срещу неутрален противник (използват се като синоними още неразумен противник или природа). Изводите и доказателствата са приложими за този тип игри и в условията на непълна или съмнително точна информация за смесената стратегия на противника, а също така при невъзможност тя да е известна преди да се вземе решение и да се предприемат действия в съответствие с него.

Авторът счита, че успешно е решил задачите, които си е поставял:

Показано е, че анализът на платежната матрица е в състояние да даде информация за границите, в които емпирично получените вероятности на състоянията, най-често представляващи относителни честоти, резултат от експеримент, може да се приемат за надеждни оценки на истинските вероятности.

Показано е, че всъщност не винаги е необходимо да се знаят тези вероятности „точно“, за да може да се вземе решение за избор на стратегия. Достатъчно е да се знаят границите, в които те може да попадат, за да бъде изпълнено едно или друго условие за доминация и получените оценки за вероятностите достатъчно надеждно да попадат в тези граници.

Разгледан е въпросът за използването на аналитично получените граници за вероятностите при оценката на емпирично получените вероятности с инструментариума на проверката на статистически хипотези и с цел да се определи риска от приемане на едно или друго решение (приемане на стратегия) за оптимално в дадена игра. Този подход е силно препоръчителен при избор на стратегия в ситуации, в които промяната на стратегията впоследствие или е невъзможна, или струва твърде скъпо.

За да се възприеме настоящия текст не са необходими специални знания. Достатъчно е читателите да владеят елементарна алгебра и геометрия и основни понятия от Теория на игрите. Поради това студията е предназначена за широк кръг читатели – от студенти, изучаващи Теория на игрите, до лица, взимащи решения на различни нива на управление, при които възникват ситуации на игра срещу неутрален (неразумен) противник.

За тази цел изложението е основано на разглеждането на два конкретни случая на игра. Платежните матрици са взети от цитираните източници без изменения. Целта е била не да се конструират някакви удобни за манипулиране матрици, от които се получават също така удобни резултати, а да се покаже приложимостта на анализа на платежната матрица такава, каквато е.

Тук читателите няма да намерят нито подробен преразказ на десетки различни източници, цитирани с повод и без повод, нито сравняване на думите на десетки автори. Няма да намерят дори изброяване на такива автори и източници. Това по никакъв начин не се включва в целите и задачите на настоящата студия. Авторът излага изключително своите идеи и решения.

Авторът счита, че доказателствата, получени с апарата на алгебрата, статистиката и изчисленията, които могат да бъдат проверени от всеки, имат наистина доказателствена стойност, за разлика от цитирането на други мнения и на други автори, колкото и много да са те.

Ако в процеса на четене у някого възникне въпросът защо са нужни всички тези изчисления и не може ли без тях, нека си припомни мисълта на Хеминг, която считаме за уместно да цитираме именно тук, в самото начало: „*Главната цел на изчисленията не са цифрите, а разбирането*“.

Платежната матрица и нейният анализ – каква информация ни носят?

Нека е дадена следната платежна матрица, съдържаща печалбите за играч А в игра срещу неутрален противник:

Таблица 1: Платежна матрица, първи пример

Стратегии	B1	B2	B3	B4
A1	50	50	50	50
A2	42	52	52	52
A3	34	44	54	54
A4	26	36	46	56

Източник: Платежната матрица е взета без изменения от Bonini (1997).

Стратегия A1 е максиминна стратегия, в случая тя е и най-сигурната от гледна точка на вероятност да се получи даден платеж. Платежът от 50 е гарантиран при всяко разпределение на вероятностите на състоянията на неутралния противник.

Желаещите могат да проверят също така и истинността на твърдението, че стратегията A1 е оптималната „смесена“ стратегия, гарантираща на играча А най-висок платеж, независещ от избора на смесена стратегия на неутралния противник В. В случая оптималната смесена стратегия за играч А се свежда до чиста, която разбираемо е и неговата максиминна стратегия. И наистина, каквато и смесена стратегия да „избере“ играчът B, очакваният платеж, който играч A ще получи не може да бъде по-нисък от 50, тъй като платежите в реда на стратегията A1 са еднакви.

Подобни матрици възникват в широк клас ситуации, характеризиращи се с обработването на поток от „ресурс“ с променливи характеристики, избор на технология, избор на мащаби на производство, избор на варианти на оборудване на предприятия и още много други. Поради това широк кръг лица, взимащи решения могат да намерят полезни идеи в настоящия текст.

Ако играчът B беше разумен/рационален въпросът с избора на оптимална стратегия за играч A би приключил. Не така стоят нещата обаче когато играчът B е „неразумен“ и не е свободен в избора на своята смесена стратегия, а „неразумно“ следва (по случаен начин) някаква определена смесена стратегия, от която нито може, нито „желае“ да се отклони в полза или във вреда на играч A.

Както се вижда, нито една от стратегиите на играча A не е доминираща, което не изключва съществуването на стохастична доминация. Нещо повече, при такива игри именно такава доминация представлява интерес, тъй като:

1. Може да бъде установена смесената стратегия на неутралния противник посредством експеримент и в съответствие с нея да се определи най-добрата стратегия за играч A;
2. Смесената стратегия на неутралния противник не се променя по желание на този противник, тя описва разпределението на вероятностите, с които този противник може да бъде в различни състояния;
3. Тези състояния на неутралния противник се наричат негови стратегии, но само в съответствие с терминологията, възприета в Теория на игрите. Неутралният противник не преследва някакви свои цели и не избира своите стратегии в съответствие с тези цели;
4. Най-добрата (наричана още оптимална) стратегия е чиста, което в определени случаи е задължително изискване, тъй като не може да се прилага смесена стратегия или множеството на смесените стратегии е дискретно и се свежда отново до взаимноизключващи се чисти стратегии.

Нека уточним понятията „случайно състояние“, „случайно разпределение“ и „стохастична доминация“, които по-нататък ще се използват в текста.

Всяко от състоянията, в което може да се намира неутралният противник B се характеризира с някаква вероятност (на всяко от възможните състояния е асоциирана някаква ненулева вероятност). Вероятността е мярка за възможността неутралният противник да се намира в даденото състояние. Невъзможните (доколкото познаваме обекта B) състояния се характеризират с нулева вероятност и априорно се изключват от платежната матрица и от понататъшно разглеждане. Състоянията представляват по-общо понятие от понятието „случайна величина“, тъй като в общия случай самите състояния не се описват с някакво число, както случайните величини, а могат изобщо да представляват нечислова информация. Поради това използването на понятието „случайна величина“ и свързаното с нея понятие „плътност на разпределението на случайна величина“ може да предизвика объркване. Случайните величини могат да се разглеждат като подмножество на случайните състояния, което се дефинира като тези състояния, които могат да се представят числово. Така например при хвърлянето на зар е прието да говорим за случайна величина само и единствено, защото върху стените на зара са означени числово изразими изображения – брой точки. Ако обаче върху стените бяха изобразени някакви други изображения, например животни, тогава нямаше да говорим за случайна величина, а за случайно състояние: „Върху горната стена на зара е изобразено куче“. Пример за случайно състояние, а не величина, са картите, върху които освен числа са изобразени още различни картини и знаците на различните бои. Въпреки това силата на картите е известна на участниците в дадена игра. Невъзможно състояние е например червено вале пика, защото по конвенция всички пики са черни.

Много ситуации в действителността са именно състояния, а не величини. Състояние е например „икономиката е в рецесия“, въпреки че съществува някакъв общоприет числов индикатор за това състояние, според който състоянието на икономиката се определя като „рецесия“. По-правилно е да се каже, че при дадените стойности на числовия индикатор е много (а колко е „много“?) вероятно икономиката да е в състоянието „рецесия“, за което ние съдим от някакви наши предишни наблюдения. Но състояния са също „лятото е студено, влажно, горещо“, „играчът е контузен, изморен, в отлична форма“ и т.н. Когато човек има телесна температура над нормалните (около) 38,6Со, казваме, че той е в състоянието „болен“, т.е. телесната температура служи за индикатор на състоянието, но за нас е важно именно състоянието, а за специалиста вече е важна точната температура (и нейната динамика), за да определи доколко сериозно е болен пациентът. Подобни примери могат да се намират навсякъде в действителността, но това не е нашата цел.

Ние ще говорим за състояния, абстрахирайки се от възможността в определени случаи състоянията да могат да се описват и числово. За да обобщим:

Нека X е множеството от състояния на неутралния играч. Казваме, че функцията

$f(x) = P(X = x_i)$ за i = 1, 2, 3 … n и
$f(x) = 0$ за $x \neq x_i$

е плътността на дискретното разпределение на състоянията, където $P(X = x_i)$ е вероятността неутралният играч да се намира в състоянието x_i. Ако X беше случайна величина, а не състояние, щяхме да говорим за вероятността X да приеме стойността x_i.

Казваме, че случайната величина P е разпределена (следва разпределението) $\{p_1 \ldots p_n\}$, където всички $p_i = f(x) = P(X = x_i)$ представляват именно вероятностите, измерващи възможността неутралният противник да се намира в състояние i. При това случайната величина P не е длъжна да следва някакво известно теоретично разпределение за наше удобство, а да описва, доколкото това е възможно, по-точно и достоверно действителните вероятности на състоянията.

Казваме, че стратегията $A\{a_1 \ldots a_n\}$ доминира стратегията $B\{b_1 \ldots b_n\}$ стохастично (между двете стратегии съществува отношение на стохастична доминация) ако при някакво разпределение на вероятностите на състоянията $P\{p_1 \ldots p_n\}$ е вярно (в матричен запис) $A'.P \geq B'.P$ или $A'.P \leq B'.P$ (в стандартен запис: $\sum_i a_i\, p_i \geq \sum_i b_i\, p_i$ или $\sum_i a_i\, p_i \leq \sum_i b_i\, p_i$), в зависимост от това, дали в платежната матрица са отразени „печалби“ или „загуби“ за играча, за който става дума. В случаите на равенство ще казваме, че между двете стратегии съществува отношение на еквивалентност, на нестрога доминация или просто че двете стратегии са „равни“ или равностойни.

Именно за такава стохастична доминация ще става дума през цялото време в настоящия текст.

При намирането на Байесова (или Бейсова, съществуват и двата прочита на името) стратегия се счита, че са предварително зададени вероятностите на състоянията на „природата“ – на неутралния противник под формата на вектор с определени числа $p_1 \ldots p_4$ в нашия случай. Тогава претеглянето на платежите за всяка стратегия на играч A с тези вероятности дава очаквания платеж и свежда матрицата до един вектор от очаквани стойности, което прави лесен избора на оптимална (Бейсова) стратегия. Знанието на вероятностите на различните състояния е важна допълнителна информация, която улеснява намирането на оптимална стратегия и свежда задачата за намиране на такава стратегия до намирането на максималното (или на минималното) число в един списък от числа. Всичко това работи само и единствено когато векторът на вероятностите е точно известен. Това обаче ограничава взимането на решения за избор на стратегия само до редките случаи, в които векторът наистина е точно известен.

Така например, ако вероятностите на състоянията бяха съответно P = (0,1 0,3 0,5 0,1), очакваните печалби при използването на различните чисти стратегии щяха да бъдат съответно 50, 51, 49 и 42. В използвания по-горе матричен запис това изглежда така:

$$\begin{pmatrix} 50 & 50 & 50 & 50 \\ 42 & 52 & 52 & 52 \\ 34 & 44 & 54 & 54 \\ 26 & 36 & 46 & 56 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,3 \\ 0,5 \\ 0,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 51 \\ 49 \\ 42 \end{pmatrix}$$

Тогава стратегия A2 ще доминира стохастично останалите стратегии и ще се явява оптимална за играча A, защото при това разпределение на вероятностите на състоянията очакваната печалба на играча A е най-голяма ако той използва само стратегия A2. Всяка друга, в т.ч. и смесена стратегия, ще дава като резултат по-ниска очаквана печалба. Ясно е, че при други вероятности на състоянието на противника е напълно възможно и другите стратегии да се окажат доминиращи. Нещо повече, за всяка една стратегия съществува (безкрайно) множество от вектори на вероятностите, при които тази стратегия ще доминира стохастично останалите.

Характерна особеност на смесената стратегия на неутралния противник, описвана от вектора на вероятностите, с които той се намира в различните възможни състояния е, че тези вероятности задължително са ненулеви. Състояние, в което неутралният противник е с вероятност нула не принадлежи към множеството от състояния, в което той може да бъде. Такова състояние не съществува от гледна точка на разглежданата ситуация и на разглеждания противник, защото той не може да изпадне в него. Въпреки това, в други ситуации такова състояние би могло да съществува, т.е. да се характеризира с ненулева вероятност.

По-нататък ние нееднократно ще използваме позоваване на състояние с нулева вероятност в процеса на доказателство на различни твърдения относно доминациите.

Отсъствието на нулеви вероятности в смесената стратегия на неутралния противник е фундаментална разлика в сравнение с играта срещу разумен противник и при оценяването на неговите смесени стратегии.

Разумният противник може да вземе решение никога да не използва дадена възможна стратегия, което означава тя да бъде с нулева вероятност в неговата смесена стратегия. Това може да съответства на целите, които разумният противник си поставя и такава възможност не може да се отхвърля.

Не може обаче да се отхвърли и възможността той да използва всяка от достъпните му стратегии, с изключение на доминираните. Изключването на доминираните стратегии от смесената стратегия на разумния играч се основава именно на неговата разумност и на предположението, че разумен играч не би избрал стратегия, за която е вярно, че съществува поне една, която я доминира.

Неутралният/неразумният противник не взима решения за своята смесена стратегия и не променя вероятностите, с които той „използва“ различните си стратегии. Поради това той може да „използва“ и „доминирани“ стратегии, защото от негова „гледна точка“ не съществуват доминирани и доминиращи стратегии. Съществуват само възможни състояния, в които той ще бъде с някаква ненулева вероятност.

Последното обстоятелство силно затруднява взимането на решение за избор на стратегия в игра срещу неутрален противник, защото не може да се използват съображенията, валидни при игра срещу разумен противник и позволяващи изключването на доминирани стратегии. За неутралния противник просто не съществуват доминирани и доминиращи стратегии и е погрешно да се взимат решения, основаващи се на предположението, че „това няма да се случи“, след като съществува ненулева вероятност то да се случи. Друг е въпросът, че събитие с много ниска (но все така ненулева) вероятност може да се „изключи“, но само при условие, че неблагоприятните последици от това събитие, умножени с въпросната ниска вероятност са наистина пренебрежими, и то когато неблагоприятните последици, ако те все пак се случат, макар и при ниската вероятност, няма да доведат до някакви фатални последици за организацията, представляваща другия играч. Така например хидротехнически съоръжения се проектират така, че да не се разрушат при настъпване на изключително редки събития, наричани „стогодишна вълна“, „хилядагодишна вълна“, „десет хиляди годишна вълна“, в зависимост от възможните последици от разрушенията, ако те настъпят. Ясно е, че тези периоди далеч надминават физическия живот на обектите и че е слабо вероятно именно по време на този живот да се случи неблагоприятното събитие, срещу което те са проектно обезопасени. Въпреки това обаче възможните последици от разрушаването на съоръженията налагат императивно да се правят допълнителни разходи за тяхното обезопасяване. От гледна точка на платежна матрица всички стратегии, при които този императив не е изпълнен са изключени от матрицата и изобщо не се разглеждат.

Обикновено се приема, че вероятностите на състоянията са предварително известни или че те могат да бъдат намерени, след което се пристъпва собствено към намирането на оптималната стратегия. Въпросът откъде се взимат вероятностите, доколко тези вероятности са „истинските“ вероятности на състоянията, възможно ли е при малко по-различни стойности на вероятностите друга стратегия да се окаже оптимална не се обсъжда, а в добрия случай се ограничава със споменаването на „анализ на чувствителността“ на оптималното решение, което обаче е по-широко понятие.

Именно на произхода на вероятностите, на тяхната „истинност“ и на това, с какъв риск може да се доверим на оптималния избор при тези вероятности е посветена голяма част от дадената студия.

На първо място, откъде се получават вероятностите, описващи състоянията на неутралния противник? Рядкост е вероятностите да идват от някакъв идеален модел, както това става в примерите със зарове и рулетка. Това са само примери, в които се приема съществуването на идеален зар или на идеално балансирана рулетка, каквито не съществуват в действителността. Те са просто удобни абстракции, подходящи за примери и за преподаване на теория на вероятностите в тази й част.

В реалността се работи с **оценки** на вероятностите, получени, най-общо казано, в резултат на експеримент, като под „експеримент“ може да се разбира и пасивното регистриране на честотите, с които неутралният противник пребивава в различните възможни състояния. Разбира се, всякакви измервания, в т.ч. и маркетингови проучвания също са в състояние да дадат някаква информация за вероятностите. Всички тези източници на информация, въз основа на която **се оценяват** вероятностите, не могат да дадат точните, да ги наречем „истинските“, стойности на вероятностите. Нещо повече, няма гаранция, че след някакъв период от наблюдения или някаква серия от експерименти непременно ще ни бъдат известни всички възможни състояния, в които може да се намира неутралният играч. Наистина, ако лицето, което трябва да вземе решение (да избере стратегия) разполага с безкрайно много време и средства, за да проведе безкрайно много експерименти, то ще разполага след тези експерименти с оценки на вероятностите, достатъчно близки до „истинските“. Но обикновено няма безкрайно много време или средства, а решение се налага да се вземе. Още повече, че в някои случаи по принцип не може да се правят експерименти и се налага да се доверим на експертни мнения. Тогава е критично важно да знаем какви въпроси да задаваме на експертите и, не по-малко важно – какви да не задаваме, за да не получаваме безполезни отговори.

Анализът на границите на изменение на вероятностите, в които се запазва доминацията на дадена стратегия над останалите, трябва да помогне при оценката на различните стратегии. Всъщност, по наше мнение, това е първото и най-важно нещо, с което трябва да се започне, още повече, че за да се направи такъв анализ е достатъчна само платежната матрица и никакви експерименти. Обосноваването на необходимостта и полезността на този анализ е един от резултатите на това научно изследване.

В играта срещу разумен противник главната тежест пада върху оценката на неговите мотиви за избор на стратегия и върху противодействието на очакваната смесена стратегия или върху използването на тази стратегия с най-голяма полза (или най-малка вреда). В най-простия случай решението се свежда до намиране на оптимална смесена стратегия, при неизвестно поведение на противника, но отчитайки възможността той да предприеме максимално неблагоприятни действия.

Как изглежда този анализ на границите на изменение на вероятностите на състоянията на неутралния противник в нашия пример?

Нека се интересуваме при какви условия стратегията А1 може да бъде (стохастично) доминираща. За да се изпълни това, е необходимо да са изпълнени следните условия за съвкупността от вероятности:

$$\begin{aligned} 50 &\geq 42p_1 + 52(1 - p_1) \\ 50 &\geq 34p_1 + 44p_2 + 54(1 - p_1 - p_2) \end{aligned} \qquad (1)$$

$$50 \geq 26p_1 + 36p_2 + 46p_3 + 56(1 - p_1 - p_2 - p_3)$$

Първото неравенство гарантира, че A1 ще доминира A2, второто неравенство – че A1 ще доминира A3 и третото неравенство – че A1 ще доминира A4. Решението на горната система от неравенства дава границите на вероятностите, в които стратегия A1 ще доминира (нестрого) останалите стратегии и ще се явява оптимална стратегия.

Тук и по-натътък в текста ще даваме условията за нестрога доминация, които се изразяват като нестроги неравенства. Желаещите да получат тези условия за строга доминация следва да заменят нестрогите неравенства със строги.

От решението на горната система неравенства следва:

$$p_1 \geq 0{,}2,\ 2p_1 + p_2 \geq 0{,}4 \text{ и } 3p_1 + 2p_2 + p_3 \geq 0{,}6 \qquad (2)$$

Ще отбележим, че е достатъчно да бъде изпълнено само $p_1 \geq 0{,}2$, за да бъдат изпълнени и останалите условия.

Също така от горните условия следва, че трябва да бъде вярно $p_1 + p_2 + p_3 \geq 0{,}2$, откъдето следва, че трябва $p_4 \leq 0{,}8$. Както ще видим по-късно, неизпълнението на това условие е необходимо условие, за да може стратегия A4 да доминира останалите.

Ще докажем, че условието $p_1 \geq 0{,}2$ е необходимо и достатъчно, за да бъде стратегия A1 доминираща останалите (в т.ч. и нестрого) и съответно – оптимална чиста стратегия.

Необходимост:

Нека предположим, че условието $p_1 \geq 0{,}2$ не е изпълнено и следователно $p_1 < 0{,}2$. Тогава обаче ще бъде вярно твърдението, че стратегия A2 доминира строго стратегия A1: $50 < 42p_1 + 52(1 - p_1)$, което след опростяване на израза дава като резултат $p_1 < 0{,}2$. Следователно, когато не е изпълнено условието $p_1 \geq 0{,}2$ съществува поне една (в случая доказахме за стратегия A2) стратегия, която строго доминира стратегия A1. Необходимо е, следователно да бъде изпълнено условието $p_1 \geq 0{,}2$.

Достатъчност:

Вече показахме, че когато е изпълнено условието $p_1 \geq 0{,}2$ стратегия A1 доминира (нестрого) останалите три стратегии, тъй като това е решението на системата от неравенства, задаваща условията за нестрога стохастична доминация на стратегия A1 над всяка една от останалите стратегии. С това всъщност сме доказали достатъчното условие стратегия A1 да бъде доминираща (нестрого).

Аналогично могат да бъдат изведени условията, при които и останалите три стратегии ще бъдат доминиращи. Тук няма да даваме всеки път доказателства, разчитайки че всеки читател може самостоятелно да провери изведените по-нататък условия. Тези условия ще бъдат необходимите и достатъчни за съществуването на нестрога доминация.

За стратегия A2 аналогично трябва да бъде в сила:

$$\begin{gathered} 42p_1 + 52(1 - p_1) \geq 50 \\ 42p_1 + 52(1 - p_1) \geq 34p_1 + 44p_2 + 54(1 - p_1 - p_2) \\ 42p_1 + 52(1 - p_1) \geq 26p_1 + 36p_2 + 46p_3 + 56(1 - p_1 - p_2 - p_3) \end{gathered} \quad (3)$$

От решението на горната система неравенства следва:

$$\mathrm{p}_1 \leq 0{,}2,\ p_1 + p_2 \geq 0{,}2 \text{ и } 2p_1 + 2p_2 + p_3 \geq 0{,}4 \quad (4)$$

Условието $p_1 \leq 0{,}2$ задава гранична стойност за p_1 – ако вероятността на стратегия A1 надмине 0,2, тя ще бъде, както видяхме вече, строго доминираща останалите.

Условието $p_1 + p_2 \geq 0{,}2$ (стратегия A2 да доминира стратегия A3) не изключва възможността $p_1 = 0{,}2$ и тогава стратегии A1 и A2 ще бъдат доминиращи останалите две, а помежду си ще бъдат в отношение на нестрога доминация всяка спрямо другата или ще бъдат еквивалентни в термините на очакван платеж.

И наистина, нека $p_1 = 0{,}2$, а p_2 да приема произволна стойност, различна от нула (тя не може да приеме стойност нула, защото това би означавало да не съществува такова състояние на природата, което се описва със стратегия B2). Тогава очакваният платеж при използването на стратегия A2 ще бъде $42p_1 + 52(1 - p_1) = 8{,}4 + 41{,}6 = 50$, което собствено и означава, че стратегиите A1 и A2 са еквивалентни от гледна точка на (сигурния) очаквания платеж от 50 при използването на стратегия A1.

В същото време очакваният платеж при стратегия A3 ще бъде равен на $34 * 0{,}2 + 44p_2 + 54(1 - 0{,}2 - p_2) = 50 - 10p_2$. При произволно малка стойност на p_2 този израз винаги ще има стойност, по-малка от 50 и следователно стратегии A2 и A1 ще доминират строго стратегия A3.

Аналогично, очакваният платеж при стратегия A4 ще бъде равен на $26 * 0{,}2 + 36p_2 + 46p_3 + 56(1 - 0{,}2 - p_2 - p_3) = 50 - 20p_2 - 10p_3$. Отново при произволни положителни стойности на p_2 и p_3този израз винаги ще има стойност, по-малка от 50 и следователно стратегии A2 и A1 ще доминират строго стратегия A4.

Следва да отбележим, че нямаме израз, конкретно задаващ някакви граници за стойностите на p_2. Тази вероятност може да бъде произволно малка, което, от една страна е необичайно, тъй като обикновено доминиращата стратегия, особено когато тя не е с много високи печалби, се свързва „поне“ с висока вероятност. От друга страна, това може да бъде неудобно когато (и ако) ни е необходима стойността на p_2.

Условието $2p_1 + 2p_2 + p_3 \geq 0{,}4$ ще бъде изпълнено винаги, когато е изпълнено условието $p_1 + p_2 \geq 0{,}2$, но то задава в неявен вид условието, при което стратегия А4 ще бъде или не доминираща, а именно $p_1 + p_2 + p_3 \geq 0{,}2$. Ако това условие е изпълнено като строго неравенство, стратегия А4 ще бъде доминирана. Ако то е изпълнено като строго равенство, то няма да бъде изпълнено условието $p_1 + p_2 \geq 0{,}2,$ тъй като това би означавало състоянието В3 на природата да не съществува, а то съществува по условие.

Както се вижда, от направения до момента анализ научихме за играта неща, които преди това и не подозирахме и които нямаше как да научим, ако просто и само приемехме (на доверие) някакви вероятности. По-късно непременно ще засегнем и въпроса за доверието към тези вероятности, които получаваме по един или друг начин.

За да бъде стратегия А3 доминираща, трябва да бъде в сила:

$$\begin{gathered} 34p_1 + 44p_2 + 54(1 - p_1 - p_2) \geq 50 \\ 34p_1 + 44p_2 + 54(1 - p_1 - p_2) \geq 42p_1 + 52(1 - p_1) \\ 34p_1 + 44p_2 + 54(1 - p_1 - p_2) \\ \geq 26p_1 + 36p_2 + 46p_3 + 56(1 - p_1 - p_2 - p_3) \end{gathered} \tag{5}$$

От решението на горната система неравенства следва:

$$2p_1 + \ p_2 \ \leq 0{,}4, p_1 + \ p_2 \leq 0{,}2 \text{ и } p_1 + \ p_2 + p_3 \geq 0{,}2 \tag{6}$$

Ще обърнем внимание, че е невъзможно едновременно да бъде вярно $p_1 \geq 0{,}2$ и $2p_1 + \ p_2 \ \leq 0{,}4$, без при това p_2 да бъде равно на нула, т.е. състоянието А2 да не съществува. Следователно няма да бъде възможно стратегии А1 и А3 да доминират останалите и в същото време да се доминират нестрого една друга, както това беше възможно при стратегии А1 и А2.

В същото време е възможно А2 и А3 взаимно да се доминират нестрого, когато е изпълнено едновременно $p_1 + \ p_2 \geq 0{,}2$ и $p_1 + \ p_2 \leq 0{,}2$, т.е. $p_1 + p_2 = 0{,}2$.

И наистина, нека е изпълнено $p_1 + \ p_2 = 0{,}2$ и $p_1 < 0{,}2$.

Тогава очакваният платеж при стратегия А2 ще бъде $42p_1 + 52(1 - p_1) = 52 - 10p_1$. Но тъй като $p_1 < 0{,}2$, то $10p_1 < 2$ и следователно $52 - 10p_1 > 50$, което означава, че стратегия А2 строго доминира стратегия А1. Както вече казахме, стратегия А1 ще бъде доминирана когато е изпълнено $p_1 < 0{,}2$, което се потвърждава.

Очакваният платеж при стратегия А3 ще бъде $34p_1 + 44p_2 + 54(1 - p_1 - p_2) = 34(p_1 + \ p_2) + 10p_2 + 54(1 - 0{,}2) = 50 + 10p_2$, което също е по-голямо число от 50 и стратегия А3 също доминира (строго) стратегия А1.

При стратегия A4 очакваният платеж ще бъде $26p_1 + 36p_2 + 46p_3 + 56(1 - p_1 - p_2 - p_3) = 26(p_1 + \ p_2) + 10p_2 - 10p_3 + 56(1 - p_1 - p_2) = 50 + 10p_2 - 10p_3$.

При положителна стойност на p_3 този израз ще бъде строго по-малък от $50 + 10p_2$ и стратегия A3 строго ще доминира стратегия A4.

Остава да докажем, че и стратегия A2 ще доминира строго стратегия A4.

Трябва да докажем, че $52 - 10p_1 > 50 + 10p_2 - 10p_3$ т.е. че стратегия A2 доминира строго стратегия A4.

Доказателство:

Ще запишем израза $52 - 10p_1$ като $52 - 10p_1 + 10p_2 - 10p_2$.

Тогава $52 - 10p_1 + 10p_2 - 10p_2 = 52 - 10(p_1 + \ p_2) + 10p_2 = 50 + 10p_2$

Следователно $50 + 10p_2 > 50 + 10p_2 - 10p_3$ при всяко p_3, различно от 0 и стратегия A2 също строго доминира стратегия A4.

За да бъде стратегия A4 доминираща, трябва да бъде в сила:

$$\begin{gathered}26p_1 + 36p_2 + 46p_3 + 56(1 - p_1 - p_2 - p_3) \geq 50 \\ 26p_1 + 36p_2 + 46p_3 + 56(1 - p_1 - p_2 - p_3) \geq 42p_1 + 52(1 - p_1) \\ 26p_1 + 36p_2 + 46p_3 + 56(1 - p_1 - p_2 - p_3) \\ \geq 34p_1 + 44p_2 + 54(1 - p_1 - p_2)\end{gathered} \tag{7}$$

От решението на горната система неравенства следва:

$$3p_1 + \ 2p_2 + \ p_3 \leq 0{,}6,\ 2p_1 + \ 2p_2 + p_3 \leq 0{,}4 \text{ и } p_1 + \ p_2 + p_3 \leq 0{,}2 \tag{8}$$

Тези изрази са слабо информативни, затова ще ги представим в друга форма

$$p_1 \leq 0{,}2, p_1 + \ p_2 \leq 0{,}2 \text{ и } p_4 \geq 0{,}8 \tag{9}$$

Условието $p_4 \geq 0{,}8$ е необходимо и достатъчно, за да бъде стратегията A4 доминираща, ако то е изпълнено, ще бъдат изпълнени и останалите.

Отново ще отбележим, че не е възможно едновременно да бъде изпълнено условието за доминация на стратегия A1 и това на стратегия A4. Това би означавало да бъде вярно едновременно $p_4 \geq 0{,}8$ и $p_1 \ \geq 0{,}2$, което е възможно единствено и само когато състоянията B2 и B3 не съществуват, тъй като те трябва да имат нулеви вероятности, а те по условие съществуват. Следователно трябва $p_1 < 0{,}2$.

Също така, не е възможно едновременно да бъде изпълнено условието за доминация на стратегия A2 и това на стратегия A4. Това би означавало да бъде вярно едновременно $p_4 \geq 0{,}8$ и $p_1 + \ p_2 \geq 0{,}2$, което е възможно единствено когато състоянието B3 не съществува, тъй като то трябва да има нулева вероятност, а то по условие съществува. Следователно трябва $p_1 + \ p_2 < 0{,}2$.

Условията стратегии A3 и A4 да са доминиращи обаче са съвместими: напълно е възможно $p_4 \geq 0{,}8$ и $p_1 + \ p_2 + p_3 \geq 0{,}2$. Това е възможно когато $p_4 = 0{,}8$ и $p_1 + \ p_2 + p_3 = 0{,}2$.

И наистина, нека е изпълнено $p_4 = 0{,}8$, $p_1 + \ p_2 < 0{,}2$ и $p_1 < 0{,}2$.

Тогава стратегия A4 ще доминира строго стратегия A1 (A1 не може да доминира никоя при горното условие $p_1 < 0{,}2$):

Платежът при стратегия A4 ще бъде $26p_1 + 36p_2 + 46p_3 + 56 * 0{,}8 = 26(p_1 + p_2 + p_3) + 10p_2 + 20p_3 + 44{,}8 = 50 + 10p_2 + 20p_3$.

При произволни стойности на вероятностите този израз ще бъде строго по-голям от 50 и следователно стратегия A4 строго ще доминира стратегия A1.

Трябва да докажем и че A4 доминира строго A2, чийто очакван платеж е $52 - 10p_1$.

Доказателство:

$$\begin{gathered}50 + 10p_2 + 20p_3 > 52 - 10p_1 \\ 50 + 10p_1 + 10p_2 + 20p_3 > 52 \\ 50 + 10(p_1 + p_2 + p_3) + 10p_3 > 52\end{gathered} \tag{10}$$

Тъй като $(p_1 + p_2 + p_3) = 0{,}2$, то $52 + 10p_3 > 52$ при произволна стойност на p_3.

Стратегия A3 също ще доминира строго стратегиите A1 и A2. Очакваният платеж при стратегия A3 е $54 - 20p_1 - 10p_2$.

За да доминира стратегията A3 стратегия A2 трябва $54 - 20p_1 - 10p_2 > 52 - 10p_1$. Това означава $54 - 10p_1 - 10p_2 > 52$, което ще бъде винаги вярно, тъй като $p_1 + \ p_2 < 0{,}2$.

За да доминира стратегията A3 стратегия A1 трябва $54 - 20p_1 - 10p_2 > 50$.

Добавяме от двете страни на неравенството $10 * (p_1 + \ p_2) < 2$. Получаваме израза $54 - 10p_1 > 50 + 10 * (p_1 + \ p_2)$.

Тъй като е вярно $p_1 < 0{,}2$, то е вярно и че $10p_1 < 2$ и следователно $54 - 10p_1 > 52$.

Тъй като е вярно и $p_1 + \ p_2 < 0{,}2$, то е вярно и че $52 > 50 + 10 * (p_1 + \ p_2)$.

Следователно неравенството ще бъде вярно:

$54 - 10p_1 > 52 \ > 50 + 10 * (p_1 + \ p_2)$ и с това доказахме, че стратегия A3 също ще доминира строго стратегиите A1 и A2 при горните условия.

Резултатите от нашия анализ може да се обобщят в следващата таблица:

Таблица 2: Условия за доминация на различните стратегии

Условие	Резултат
$p_1 < 0{,}2$	Стратегия А1 е строго доминирана
$p_1 = 0{,}2$	Стратегии А1 и А2 строго доминират останалите и взаимно се доминират нестрого
$p_1 > 0{,}2$	Стратегия А1 е строго доминираща останалите
$p_1 + p_2 = 0{,}2,\ p_1 < 0{,}2$	Стратегии А2 и А3 строго доминират останалите и взаимно се доминират нестрого
$p_1 + p_2 \geq 0{,}2, p_1 < 0{,}2$	Стратегия А2 е строго доминираща останалите
$p_1 + p_2 + p_3 > 0{,}2,$ $p_1 < 0{,}2, p_1 + p_2 < 0{,}2$	Стратегия А3 е строго доминираща останалите
$p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}2$	Стратегии А3 и А4 строго доминират останалите и взаимно се доминират нестрого
$p_1 + p_2 + p_3 < 0{,}2$	Стратегия А4 е строго доминираща останалите

Подредбата на стратегиите **А1-А2-А3-А4** е единствената, за която са верни следващите твърдения:

1. Всеки две съседни (в подредбата) стратегии може да бъдат едновременно доминиращи останалите и взаимно да се доминират нестрого.
2. Никои две несъседни стратегии не могат да бъдат едновременно доминиращи, тъй като това предполага някакво количество от състоянията на неутралния противник да има нулева вероятност.

В този смисъл някои стратегии са „близки“ една до друга, а други са „отдалечени“, като мярка за отдалеченост може да бъде броят състояния на неутралния противник, които трябва **да не съществуват**, за да може дадената двойка стратегии да станат съседни.

Съвкупността от стратегии, при наличието на единствена подредба с горните свойства, вече е структурирана. Обикновено на тази съвкупност се гледа като на един прост списък от възможни стратегии, към който се предявява единственото изискване да бъде изчерпателен. Списък, в който местата на стратегиите може произволно да се разместват или да се подреждат например по азбучен или друг някакъв ред. Оказва се обаче, че и тук съществува някакъв ред, подредба, която сама по себе си носи информация. Това също е оригинален, несрещан в литературата резултат от настоящото изследване.

За по-доброто разбиране на гореказаното ще използваме друг, по-прост пример, който ще ни позволи не само да получим точни стойности за вероятностите на състоянията, но и графично да изобразим „близостта“ и „отдалечеността“ на различните стратегии.

Близки и далечни стратегии. Графично изобразяване на множеството от стратегии

Нека е дадена следната матрица на платежите, в която възможните състояния на неутралния противник са само две:

Таблица 3: Платежна матрица, втори пример

Стратегии	B1	B2
A1	0	5
A2	1	3
A3	3	2

Източник: Тази платежна матрица е взета без изменения от Коршунов (1987).

Постановката на задачата пред лицето, взимащо решение е следната: Трябва да се избере една от три възможни технологии (стратегии) за преработка на суровина, която може да се характеризира по случаен начин с ниско съдържание на примеси (състояние B1) или с високо съдържание на примеси (състояние B2).

Примесите влияят негативно на качеството на крайния продукт и поради това се налага да се правят допълнителни разходи за частично пречистване на суровината преди основната преработка. Суровината не е с постоянен химически състав, той варира в някакви граници.

Тъй като ще се строи един завод за преработка на суровината, не може да се използват няколко различни технологии. Самите технологии не може да се „смесват" и да се получават нови технологии.

Това е типичен случай на игра, в която стратегията се избира само веднъж и играта „свършва" от гледна точка на взимането на инвестиционно решение. Но последиците от този избор ще се усещат в продължение на дълги години, докато работи заводът. Играта не може да се играе много пъти, като всеки път се сменя технологията, което би могло да се разглежда също като смесена стратегия. Подобна многократна игра предполага спиране на завода, смяна на оборудването, за да се използва друга технология, пускане на завода с другата технология, отново спиране, смяна на оборудването и т.н. много пъти в зависимост от качеството на постъпващата суровина, всъщност – всеки път, когато постъпи нова партида суровина.

Разбира се, от финансова гледна точка, играта продължава, защото всеки път, когато постъпва нова партида суровина, противникът (играчът B) прави своя ход, своя „избор на стратегия", от който зависят разходите в конкретния случай, в зависимост от направения някога избор на стратегия от играча A. В този смисъл играта се играе много пъти, като всеки път играчът A прилага една и съща стратегия, т.е. той е ограничен при своя избор само върху чистите стратегии-технологии. Еднократният избор на чиста стратегия изисква този избор да бъде направен максимално внимателно и по възможност да се избере най-добрата (оптималната) в дадената ситуация стратегия.

Играчът, да предположим, че това е инвеститорът, трябва да вземе решение само веднъж и трябва да избере само една от трите възможни технологии.

За разлика от предишния пример, тук в матрицата са дадени допълнителни разходи за играча А, които той ще трябва да прави за преработката на суровината при дадена технология и при дадено съдържание на примеси (ниско или високо). Тази постановка ще ни даде възможност да използваме и другото разбиране за доминация – колкото по-малки са очакваните допълнителни разходи при избора на една или друга стратегия (технология), толкова по-добра е тази стратегия в дадената ситуация.

Вече казахме в началото, че е налице доминация когато е вярно A'.P ≥ B'.P или A'.P ≤ B'.P (в стандартен запис: $\sum_i a_i\, p_i \geq \sum_i b_i\, p_i$ или $\sum_i a_i\, p_i \leq \sum_i b_i\, p_i$), в зависимост от това, дали в платежната матрица са отразени „печалби“ или „загуби“ за играча, за който става дума. Тъй като в нашата матрица са дадени допълнителни разходи за пречистване на суровината от примеси, то доминацията ще се дефинира по втория начин – една стратегия X доминира друга стратегия Y (стохастично), ако очакваните допълнителни разходи при нея $\sum_i x_i\, p_i$ са по-ниски отколкото при другата $\sum_i y_i\, p_i$. Векторът P (p_1 p_2) ще описва вероятностите, с които в завода ще постъпва суровина с ниско съдържание на примеси (p_1) и с високо съдържание на примеси (p_2). Това е съществена разлика, в сравнение с предишния пример, и тук я подчертаваме изрично, за да не се получи объркване по-нататък при описването на доминациите между стратегиите.

Също така, за разлика от предишния случай, тук ще работим с условията за строга доминация. Условията за доминация, за разлика от предишния случай ще бъдат с обратен знак – не „по-голямо“, а „по-малко“, защото по-малки разходи за пречистване и преработка на суровината са за предпочитане.

При какво разпределение на вероятностите на двете състояния, стратегия А1 ще доминира останалите? Условията за строга доминация са следните:

$$\begin{gathered} 0 * (1-p) + 5p < 1 * (1-p) + 3p \\ 0 * (1-p) + 5p < 3 * (1-p) + 2p \end{gathered} \tag{11}$$

където с p е означена вероятността, с която неутралният противник ще бъде в състояние B2 и съответно с 1 – p – вероятността той да бъде в алтернативното състояние B1.

Решавайки тази система от неравенства получаваме за p:

$3p < 1$ и $6p < 3$ или $p < \frac{1}{3}$ и $p < \frac{1}{2}$. Очевидно, условието $p < \frac{1}{2}$ ще бъде изпълнено винаги когато е изпълнено по-силното условие $p < \frac{1}{3}$.

Условията стратегия A2 да доминира останалите две стратегии са:

$$\begin{gathered} 1 * (1-p) + 3p < 5p \\ 1 * (1-p) + 3p < 3 * (1-p) + 2p \end{gathered} \tag{12}$$

Решавайки тази система от неравенства получаваме за p:

$$1 < 3p \text{ и } 3p < 2 \text{ или } \frac{1}{3} < p < \frac{2}{3}.$$

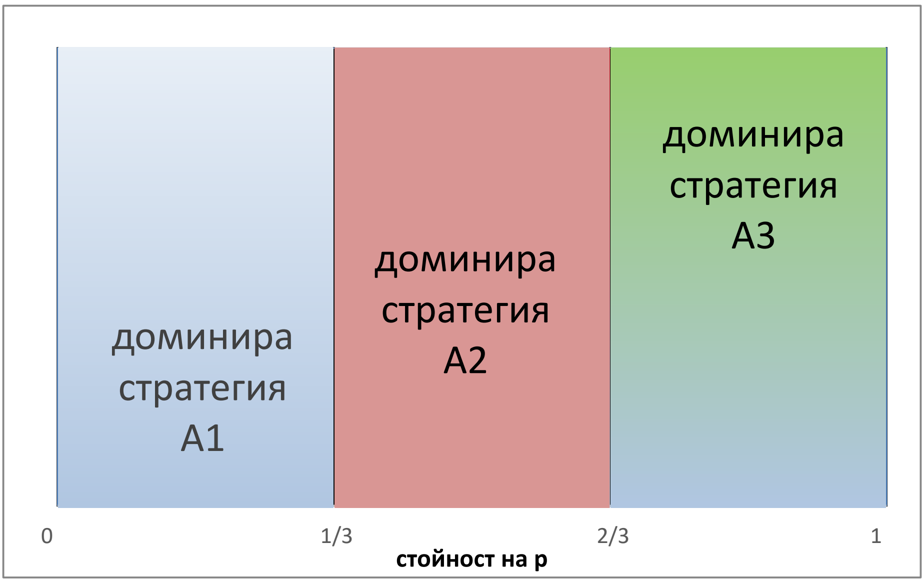
Условията, стратегия A3 да доминира останалите две стратегии, са:

$$\begin{gathered} 3 * (1-p) + 2p < 5p \\ 3 * (1-p) + 2p < 1 * (1-p) + 3p \end{gathered} \tag{13}$$

Решавайки тази система от неравенства получаваме за p:

$3 < 6p$ и $2 < 3p$ или $p > \frac{1}{2}$ и $p > \frac{2}{3}$. Очевидно условието $p > \frac{1}{2}$ ще бъде изпълнено винаги когато е изпълнено по-силното условие $p > \frac{2}{3}$.

Сега вече можем да изобразим графично близостта или отдалечеността на трите стратегии:



Фигура 1: Граници, в които доминират различните стратегии на играч **A**

Подредбата на стратегиите **А1-А2-А3** има описаните по-горе свойства.

Наистина, нека $p = \frac{1}{3}$, граничната стойност между стратегии А1 и А2.

Тогава стратегии А1 и А2 ще бъдат еквивалентни и ще доминират строго стратегия А3. Платежите в този случай, претеглени с вероятностите *p* и *1-p* ще бъдат съответно $\frac{5}{3}$, $\frac{5}{3}$ и $\frac{8}{3}$ за всяка от стратегиите в изброения ред.

Ако $p = \frac{2}{3}$ стратегии А2 и А3 ще бъдат еквивалентни и ще доминират строго стратегия А1. Платежите в този случай, претеглени с вероятностите *p* и *1-p* ще бъдат съответно $\frac{10}{3}$, $\frac{7}{3}$ и $\frac{7}{3}$ за всяка от стратегиите в изброения ред.

Ако вероятността *p* се измества все по-далеч от границата $\frac{2}{3}$ и се приближава към 1, доминацията на стратегия А3 над останалите ще става все по-явна. Съзнателно не използваме понятието „по-силна“, защото освен стохастичната форма на доминация съществуват по-силни форми[2] на доминация и това би могло да предизвиква терминологично объркване. Логично е когато р клони към 1, очакваните платежи на играч А да клонят към стойностите във втората колона на матрицата, а именно към 5, 3 и 2 и тогава стратегия А3 ще бъде предпочетена пред останалите.

Аналогично, колкото повече вероятността р се измества от $\frac{1}{3}$ към 0, толкова по-явна ще става доминацията на стратегия А1 над останалите.

Това означава стратегиите да са „близки“ или „отдалечени“.

А може ли стратегии А1 и А3, които на нашата графика са „разделени“ и в подредбата на стратегиите А1-А2-А3 не са „съседни“ все пак да бъдат едновременно доминиращи стратегия А2 и взаимно слабо да се доминират? За да се случи това трябва да бъдат изпълнени условията за доминация на двете стратегии над стратегия А2 едновременно:

$$\begin{aligned} 0 * (1-p) + 5p &< 1 * (1-p) + 3p \\ 3 * (1-p) + 2p &< 1 * (1-p) + 3p \end{aligned} \qquad (14)$$

Решавайки тази система от неравенства получаваме за р:

$3p < 1$ и $2 < 3p$ или $p < \frac{1}{2}$ и $p > \frac{2}{3}$. Очевидно, няма такива стойности за вероятностите *p* и *1-p*, удовлетворяващи едновременно и двете условия и следователно за тези две стратегии винаги ще бъде вярно, че едната ще доминира строго другата, като не се изключват варианти, в които А2 доминира и двете или А2 доминира заедно с някоя от тях.

[2] Изброяването на формите на доминация и изясняването на техните отношения не влиза в целите и задачите на това изследване.

Също така ще бъде винаги вярно и че не съществува такава смесена стратегия за играч A, която представлява смес между стратегии A1 и A3 и която доминира чистата стратегия A2. Това може лесно да се докаже аналитично и отново ще се получи, че не съществуват такива вероятности $\{p_1, p_2=0, p_3\}$, сега вече за играч A, при които платежите, претеглени с тези вероятности, са по-ниски от платежите при смесена стратегия с участието на A2, което означава, че чистата стратегия A2 или смесена стратегия, в която стратегия A2 участва с ненулева вероятност винаги ще доминира всяка смесена стратегия, получена само от стратегиите A1 и A3.

Ще докажем горното твърдение за смесени стратегии и тъй като чистите стратегии са частен случай на смесените, с това ще докажем и твърдението за чистата стратегия A2.

И наистина, нека предположим, че съществува смесена стратегия P от стратегиите A1 и A3 и друга смесена стратегия Q от стратегиите A1 и A2 (в това число и чистата стратегия A2). За да бъде стратегията P доминираща стратегията Q, трябва да бъде вярно следното:

$$\begin{gathered} 0*(1-p)+3p<0*(1-q)+1q \\ 5*(1-p)+2p<5*(1-q)+3q \end{gathered} \tag{15}$$

След опростяване на двете страни на неравенствата ще получим две взаимноизключващи се условия за вероятностите:

$$\begin{gathered} 3p<1q \\ -3p<-2q \end{gathered} \tag{16}$$

Тази система от неравенства има решение извън дефиниционната област на вероятностите $0<-q$ или, в друга форма, трябва едновременно да бъде вярно $3p<1q$ и $2q<3p$.

В частния случай, когато смесената стратегия Q се състои само от чистата стратегия A2, т.е. q = 1, горните неравенства ще означават, че трябва $p<\frac{1}{3}$ и $p>\frac{2}{3}$. С това доказахме и че не съществува смесена стратегия между стратегиите A1 и A3, която да доминира стратегия A2.

Аналогично, нека съществува смесена стратегия P от стратегиите A1 и A3 и друга смесена стратегия Q от стратегиите A3 и A2. За да бъде стратегията P доминираща стратегията Q, трябва да бъде вярно следното:

$$\begin{gathered} 0*(1-p)+3p<3*(1-q)+1q \\ 5*(1-p)+2p<2*(1-q)+3q \end{gathered} \tag{17}$$

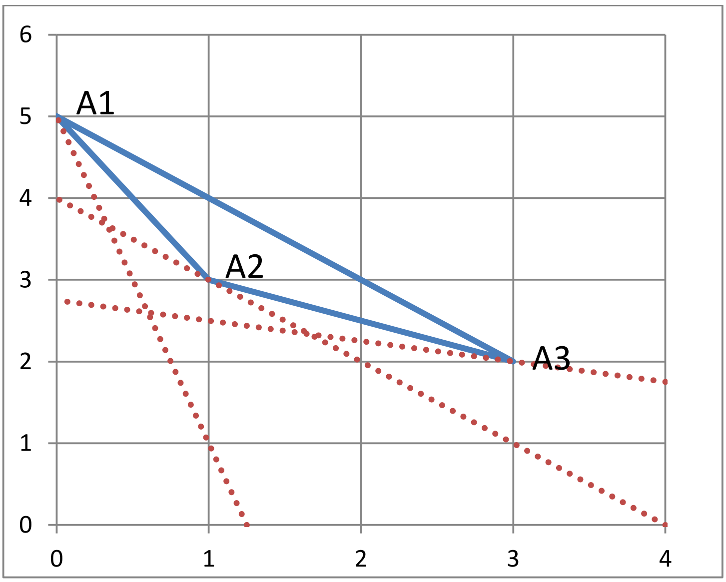
След опростяване на двете страни на неравенствата отново ще получим две взаимноизключващи се условия за вероятностите:

$$3p < 3 - 2q \tag{18}$$
$$5 - 3p < 2 + q$$

Ако съберем двете неравенства ще получим $5 < 5 - q$, което може да бъде вярно единствено когато за вероятността q е изпълнено $0 < -q$.

Доказахме, че не съществуват такива смесени стратегии P от стратегиите A1 и A3 и Q от стратегиите A1 и A2 или от стратегиите A2 и A3, за които да е вярно, че стратегията P доминира (строго, тъй като всички доказателства бяха за строга доминация) стратегия Q. Наличието само на две състояния ни дава възможност да изобразим графично самата платежна матрица и тогава по-лесно се разбира защо няма смесена стратегия от A1 и A3, доминираща смесена стратегия, в която е включена стратегия A2, както и защо съществуват интервали за вероятностите на състоянията B1 и B2, в които дадена чиста стратегия е доминираща.

Следващата графика изобразява трите чисти стратегии като точки, чиито координати са платежите в двете състояния B1 и B2. Отсечките, съединяващи тези точки са смесените стратегии, които се получават от съответните две чисти стратегии – краища на отсечките. Всяка точка, вътрешна за получаващия се триъгълник A1A2A3 съответства на някаква смесена стратегия, в която участва с ненулева вероятност всяка от трите чисти стратегии.



Фигура 2: Множество на смесените стратегии на играч **A**

Както може да се види, върхът, съответстващ на стратегия А2, е разположен по-близо до началото на координатната система от всяка точка от отсечката А1А3, която всъщност съответства на всяка смесена стратегия от чистите стратегии А1 и А3. Началото на координатната система съответства на нулеви допълнителни разходи за преработка на ресурса и в двете възможни състояния на преработваната суровина и в дадения случай може да се разглежда като някаква идеална технология, нечувствителна към наличието или не на примеси в суровината. Несъмнено, ако такава стратегия (технология) съществуваше, тя щеше да доминира строго всички останали и нямаше да съществува задачата за избор на технология. Съществуването на множество възможни стратегии е породено от необходимостта да се разработят технологии в различни ситуации, като различните технологии са повече или по-малко приспособени за различни качества на суровините.

Несъществуването на смесена стратегия от чистите стратегии А1 и А3, която да доминира смесена стратегия, в която участва и А2 се обяснява нагледно така: не съществува точка от отсечката А1А3, за която да не съществува друга точка, такава че:

1. е по-близо до началото на координатната система;
2. е част или от отсечката А1А2, или от отсечката А2А3.

Следователно, за всяка смесена стратегия от стратегии А1 и А3 може да се намери друга стратегия, която е смесена от стратегии А1 и А2 или от А2 и А3 и която да я доминира.

Като следствие от това – не съществуват такива вероятности на състоянията В1 и В2, за които смесена стратегия от стратегии А1 и А3 да не е доминирана от стратегия, която е смесена от стратегии А1 и А2 или от А2 и А3, т.е. да не е доминирана стохастично.

Последното е вярно и в показаните на графиката случаи, в които пунктираните линии преминават през някой от върховете на триъгълника А1А2А3. Чистата стратегия А1 например може да се разглежда като частен случай на две смесени стратегии, при които една от вероятностите е нулева, а другата е равна на единица: смесената стратегия между стратегии А1 и А2, в която стратегия А2 участва с вероятност нула и смесената стратегия между стратегии А1 и А3, в която стратегия А3 участва с вероятност нула.

С пунктираните линии на графиката са изобразени три различни случая на вероятности за състоянията В1 и В2. Разбира се, вероятностите не се отчитат по осите, а следва да се възприемат като наклони на правите. Съотношенията между отрезите представляват съответно и съотношенията между вероятностите на двете състояния. Така например, допирателната в точка А1 съответства на вероятности 0,8 за състояние В1 и 0,2 за състояние В2. Върхът А1 е първата точка от триъгълника А1А2А3 (всъщност – от множеството от всички смесени стратегии), „най-близката до идеалната“, през която преминава права, описваща вероятностното разпределение {0,8; 0,2} на състоянията B1 и B2.

Съответно, останалите две допирателни в точките A2 и A3 описват вероятностни разпределения {0,5; 0,5} и {0,2; 0,8}. Тези вероятности са взети случайно с единствената цел да илюстрират допирателни в трите възможни върха на множеството от смесени стратегии и да покажат, че допирателните винаги са във върховете, които представляват чистите стратегии. В частния случай на съвпадение на наклоните на страните на триъгълника A1A2 и A2A3 и на правите, описващи разпределението на вероятностите е възможно две чисти стратегии да бъдат, както вече доказахме аналитично, еквивалентно доминиращи. Тогава допирателната ще съвпада с някоя от страните и ще преминава през двата върха и ще съществуват множество еквивалентни смесени стратегии, ако това е възможно. При съществуващата постановка на задачата за избор на технология не съществува множество от „смесени технологии“.

Сега се вижда и защо и кога стратегиите A1 и A3 може да бъдат доминиращи едновременно – само когато върхът A2 не съществува, т.е. не съществува чистата стратегия A2 и триъгълникът се сведе до отсечката A1A3. Ако това не е изпълнено, винаги ще съществува точка от контура A1A2A3 (ето я строгата подредба на стратегиите, за която стана вече дума), която ще доминира всяка от точките от страната A1A3.

Както може да се досетим, съществуват множество разпределения на вероятностите на състоянията (множество прави с различни наклони, описващи такива разпределения), за които дадена чиста стратегия продължава да бъде доминираща. Всъщност, в предшестващия анализ на платежната матрица ние установихме границите на изменения на тези наклони/разпределения. По-подробно въпросът за наклоните и как те се интерпретират като вероятностни разпределения в двумерния случай е разгледан в посочения източник (Коршунов, 1987).

Именно наличието на безброй много разпределения, запазващи доминацията на една или друга чиста стратегия над останалите трябва да ни накара да се съмняваме в „единствеността“ на полученото по експериментален път разпределение на вероятностите на състоянията и да разглеждаме това разпределение просто като една от многото възможности.

Използване на информацията, получена от анализа на платежната матрица. Оценка на емпиричните вероятности

Нека сега се върнем към основната игра, с която започна студията. Нейната платежна матрица не се поддава на графично изобразяване, но при нея също можем да подредим строго четирите стратегии.

След като направихме анализа на платежната матрица, вече имаме всичката необходима информация, за да пристъпим към същинската част – оценяването на качеството или на достоверността на вероятностите, с които бихме могли да разполагаме в резултат на експеримент или изготвянето на въпроси към експерт или експертна група.

Нека първо разгледаме как може да се използват получените от анализа резултати в случая, когато е невъзможно да се проведе експеримент – например когато „истинските" вероятности на състоянията ще станат известни в бъдеще, когато реализираме някакви наши действия, но не преди тяхната реализация или експериментът е неприемливо скъп (в широкия смисъл на значението). В такава ситуация ние можем да се обърнем към експерт или експертна група, за да бъдат оценени вероятностите… на какво? Да се асоциират някакви конкретни вероятности на всяко състояние? Да се определят някакви граници, в които тези вероятности ще попаднат според експертите?

Трябва да знаем какво да питаме експертите и не по-маловажно – какво да не ги питаме. Така например, не бива да искаме от тях да ни дадат точна вероятност за всяко състояние, в добрия случай те биха ни дали някакви граници, в които тази вероятност според тях ще попадне.

Но ние **вече** знаем какво да питаме:

Ще бъде ли вероятността p_1 по-голяма от 0,2? Ако отговорът е положителен, ние знаем, че стратегия А1 ще доминира строго останалите и няма нужда да задаваме повече въпроси.

Ако отговорът е отрицателен, ние знаем, че стратегията А1 ще бъде доминирана, освен ако не е точно равна p_1 на 0,2. Но ако е точно равна на 0,2, ние знаем, че тя ще бъде еквивалентна на стратегия А2 в термините на очакван платеж и че двете строго ще доминират останалите. Въпреки това, можем да продължим:

Ще бъде ли кумулативната вероятност $\boldsymbol{p_1 + p_2}$ по-голяма от 0,2? Ако отговорът е положителен, ние вече знаем, че стратегия А2 ще бъде доминираща, възможно – наравно със стратегия А1, но не ни трябва да знаем нищо повече за стратегии А3 и А4, за да вземем решение. В противен случай стратегиите А1 и А2 ще бъдат доминирани и остава да разберем от коя стратегия.

Ще бъде ли кумулативната вероятност $\mathbf{p_1 + p_2 + p_3}$ по-голяма от 0,2? Ако отговорът е положителен, ние вече знаем, че стратегия А3 ще бъде доминираща, възможно – наравно със стратегия А2 (когато $\mathrm{p_1 + p_2}$ е точно равна на 0,2), но не ни трябва да знаем нищо повече за стратегии А1 и А4, за да вземем решение. В противен случай стратегията А4 ще бъде строго доминираща останалите.

Ще бъде ли вероятността p_4 по-голяма от 0,8? Ако отговорът е положително, ние вече знаем, че стратегия А4 ще бъде доминираща, възможно – наравно със стратегия А3, (когато p_4 е точно равна на 0,8), но не ни трябва да знаем нищо повече за стратегии А1 и А2, за да вземем решение.

Разбира се, можем да зададем и въпроса за кумулативната вероятност $p_1 + p_2 + p_3$ – дали тя ще бъде по-малка от 0,2.

Изобщо, можем да комбинираме въпросите по удобен за експертите начин, като при това не ги насилваме да дават отговори, каквито не могат и в същото време можем да проверим техните мнения за вътрешна противоречивост, тъй като имаме вече критерии за такава противоречивост.

Получаването на такива критерии за противоречивост като пряк резултат от анализа на платежната матрица също е резултат от настоящото изследване, какъвто до момента не е получаван.

Нека сега се върнем към вектора на вероятностите от началото на изложението и да предположим, че той е получен в резултат на 200 наблюдения, това ще бъде размерът на нашата извадка, въз основа на която ще оценяваме вероятностите. Да напомним, че векторът изглеждаше така: P={0,1 0,3 0,5 0,1}. Доминираща стратегия е A2, което вече можем да установим и без да изчисляваме очакваните платежи, както направихме в началото. Просто трябва да видим, че не са изпълнени редица условия за доминация на останалите стратегии, например p_4 е по-малка от 0,8, а p_1 е по-малка от 0,2, но в същото време сумата $p_1 + p_2$ е по-голяма от 0,2. Анализът на матрицата на платежите ни дава възможност да знаем условията за доминация на някоя стратегия още преди да сме научили каквото и да било за разпределението на вероятностите.

Ако векторът на вероятностите е например P={0,15 **0,25** 0,45 0,15}, ние отново ще знаем и без да проверяваме коя стратегия ще бъде доминираща. Но ако непременно искаме да изчислим очакваните печалби на играч A при точно това разпределение, то изразът е следният:

$$\begin{pmatrix} 50 & 50 & 50 & 50 \\ 42 & 52 & 52 & 52 \\ 34 & 44 & 54 & 54 \\ 26 & 36 & 46 & 56 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}15 \\ 0{,}25 \\ 0{,}45 \\ 0{,}15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50{,}0 \\ \mathbf{50,5} \\ 48{,}5 \\ 42{,}0 \end{pmatrix} \qquad (19)$$

Както се вижда, отново стратегията A2 е доминираща, което не трябва да ни учудва, тъй като това разпределение също изпълнява условията за доминация на стратегия A2.

При вектора P={**0,20 0,05** 0,40 0,35} са изпълнени условията за едновременна доминация на стратегиите A1 и A2 над стратегии A3 и A4:

$$\begin{pmatrix} 50 & 50 & 50 & 50 \\ 42 & 52 & 52 & 52 \\ 34 & 44 & 54 & 54 \\ 26 & 36 & 46 & 56 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}20 \\ 0{,}05 \\ 0{,}40 \\ 0{,}35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{50,0} \\ \mathbf{50,0} \\ 49{,}5 \\ 45{,}0 \end{pmatrix} \qquad (20)$$

Изобщо, информацията за граничните стойности на вероятностите или на кумулативните вероятности ни освобождава от необходимостта да изчисляваме очакваните платежи и да проверяваме вече доказаното с някакви конкретни вектори на разпределения на вероятностите на състоянията. Освобождава ни също така и от съмненията от рода „Ами ако все пак ето тази вероятност е малко по-висока или малко по-ниска, няма ли да сгрешим в нашия избор?“.

Считаме, че това е изключително важен и полезен резултат, получен в тази студия.

Важният въпрос е: доколко можем да вярваме на вероятности, получени като относителни честоти в резултат на някакво количество наблюдения и измервания? Тук отново ще ни бъдат полезни получените по-рано резултати, но сега вече те ще бъдат използвани за проверка на хипотези.

Например, можем да определим с приета доверителна вероятност пределната грешка на извадковата относителна честота, която ние **приехме** за p_1, но в действителност тя е само **оценка** на тази вероятност.

Да предположим, че доверителната вероятност ще бъде 0,999, което е много висока вероятност. Тогава средната грешка на извадковия относителен дял от 0,1 ще бъде (при извадка от 200) равна на 0,0212. Пределната грешка при приетата доверителна вероятност ще бъде 3,09 * 0,0212 = 0,0656 (закръглено). Следователно, генералният относителен дял („истинската“ вероятност p_1) с вероятност 0,999 се намира в интервала 0,0344 – 0,1656 или по-точно записано:

$$0{,}034446 \leq p_1 \leq 0{,}165554 \qquad (21)$$

Но ние знаем, че границата, при която стратегията А1 ще бъде доминирана е $p_1 < 0{,}2$. С повече от приемлив риск за грешка можем да приемем, че в действителност стратегия А1 ще се окаже доминирана, дори да научим „истинската вероятност“, намираща се някъде в интервала с много голяма вероятност. Поставяме истинската вероятност в кавички, защото много често ние не можем да я знаем, дори в резултат на 2000 наблюдения, просто защото генералната съвкупност може да е безкрайно голяма и ние никога няма да я научим (истинската вероятност). Както се вижда, това не е и нужно, достатъчно е да знаем, че е слабо вероятно или „приемливо невероятно“[3] тя да се доближи до 0,2.

[3] Така например вероятността за съвпадение на пръстовите отпечатъци на двама души, едновременно живеещи на планетата не е нулева, но е „приемливо вероятно“ това да не се случи (или приемливо невероятно това да се случи), поради което в криминалистиката съвпадението на отпечатъци, получени „емпирично“ с тези на дадено лице се счита за улика, а не за просто съвпадение.

По същия начин можем да приемем и че стратегия А4 няма да бъде доминираща, тъй като за нея беше необходимо $p_4 \geq 0{,}8$, а от емпиричните данни сме получили относителна честота 0,1.

След като имаме граничните стойности на вероятностите или на техни суми, можем да проверяваме доколко емпиричните вероятности са близки или не до тези гранични стойности и да преценим от съвсем други позиции обема на извадката, от която получаваме оценките за вероятностите на състоянията.

Обемът на извадката не е въпрос на вкус, на желание или възможност да се похарчи някаква сума пари. Още по-малко той се определя от формални общи съображения от рода на „добре е извадката да е по-голяма“. Вече видяхме, че при получена емпирична вероятност p_1 от 0,1 няма значение дали сме сгрешили с 0,05 или с 0,08. Нещо повече, за нас, за взимането на решение коя стратегия да бъде избрана значение има дали p_1 превишава или не 0,2 и е без значение дали вероятността е 0,12 или 0,08 например, тъй като решението за избор е устойчиво в границите от 0 до 0,2.

Налице е асиметричност в отношението ни към посоката на отклонение на оценката на емпирично получената вероятност от „истинската“. Ние нямаме нищо против да надценим „истинската“ вероятност и да отхвърлим стратегия А1 като доминирана, но бихме искали да не допуснем критично подценяване, защото точно тогава ще отхвърлим оптималната стратегия. Но за целта трябваше да знаем колко точно е критичното подценяване.

Този подход, този поглед към резултатите от емпиричните относителни честоти като оценки на вероятностите е друг важен резултат от направеното изследване.

Нека например „истинската вероятност“ да е 0,10, а нашата оценка е 0,14. Налице е несъмнено надценяване в резултат на това, че ние работим с оценка от някаква извадка. Това обаче няма никакви последици за взиманите решения. Тъй като едва при вероятност p_1 над 0,2 стратегия А1 е доминираща и би следвало да приемем нея за оптимална, а надценяването не води до приемането на А1 за доминираща, надценяването не е критично погрешно. Ако обаче „истинската“ вероятност p_1 е 0,22, т.е. би трябвало да приемем стратегия А1 за доминираща всички останали, а нашата оценка е 0,18, това подценяване би имало критични последици. Реално доминиращата стратегия А1 ще бъде отхвърлена като доминирана и ще бъде възприета някоя друга стратегия.

Понякога такава грешка може лесно да бъде поправена, когато играта се играе много пъти (по-точно – когато играчът А има възможността много пъти да променя своята стратегия) и избраната стратегия може лесно да се промени от играч А и това не струва скъпо.

Не така стоят нещата обаче когато играта (изборът на стратегия на играч А) се играе само веднъж, както беше случаят с избора на технология. Поправянето на грешката е възможно, но струва твърде скъпо – трябва заводът да бъде спрян, да се закупи ново оборудване, реализиращо новата избрана технология, то да се монтира на мястото на старото и всичко това е свързано с разходи на време и ресурси.

Изборът на размера на извадката и особено решението дали тя да се увеличава ще зависи от приемливия риск да отхвърлим оптималната стратегия, а той зависи от установените при анализа граници, които на свой ред зависят единствено и само от свойствата на платежната матрица, а не от състоянията на „природата“, от разпределението на вероятностите на тези състояния или от нечии представи за „голяма извадка“.

Какво би станало, ако нашата извадка беше все така „голяма“ от формални позиции, но два пъти по-малка от тази, която ние постулирахме, т.е. – не 200, а „само“ 100 наблюдения? От гледна точка на изводите за това, дали стратегия А1 може да бъде доминираща или ще бъде доминирана и следва да се елиминира – нищо съществено. Да, наистина, средната грешка на извадковия относителен дял от 0,1 ще бъде (при извадка от 100) равна на 0,03. Пределната грешка при приетата доверителна вероятност 0,999 ще бъде 3,09 * 0,03 = 0,0927 (закръглено). Но въпреки това интересуващата ни страна на интервала, в който p_1 ще се намира с вероятност 0,999, а именно – дясната страна ще бъде 0,1927 (закръглено), което отново е по-малко от критичната стойност от 0,2.

Увеличаването на обема на извадката от 100 на 200 може да уточни оценката на p_1, може да стесни интервала, в който p_1 ще се намира с вероятност 0,999, може да направи нашия извод за това, дали стратегия А1 е доминирана или доминираща по-надежден, но е слабо вероятно диаметрално да го промени.

Аналогично можем да оценим доколко съществува риск (при така получените емпирични вероятности) при приемането или не на някакъв извод, състоящ се в това, дали са изпълнени и останалите условия за доминация, които получихме от анализа.

Тук могат да се приложат и известните статистически тестове за проверка на хипотези за това, дали дадено получено емпирично разпределение се различава статистически значимо от дадено теоретично разпределение. В ролята на теоретичното разпределение ще се използва някое от интересуващите ни разпределения, при което дадена стратегия е било доминираща, било – доминирана, в зависимост от това, което ни интересува. Но все пак не бива да забавяме, че анализът на платежната матрица задава интервали, цели области от възможни разпределения, в които дадена стратегия е доминираща (или е доминирана). Така например за всяко p1, по-голямо от 0,2, независимо от това колко точно е по-голямо, стратегия А1 ще бъде доминираща и с това въпросът за избор на стратегия се приключва. Съвсем друг е въпросът когато по някакви причини ни интересуват „точните вероятности“.

Нека сега разгледаме друга хипотетична ситуация. Дадена е платежната матрица, ние нищо не знаем за разпределението на вероятностите, защото още нямаме никакви наблюдения (нямаме извадка, обемът ѝ засега е нулев). Но нашият предишен опит от **подобни** ситуации сочи, че интересуващата ни вероятност p_1 е „някъде около“ 0,1. Подобието на ситуациите се изразява не в подобие на платежните матрици, те могат да бъдат съществено различаващи се, а в подобието на разпределението на вероятностите на състоянията на неутралния противник. Подобието на разпределението може би ще означава и подобие във взимането на решение за избор на стратегия?

Разбира се, ние не сме сигурни доколко предишният ни опит е приложим в конкретната ситуация, възможно е тя **съществено** да се отличава от предишните. Какво означава съществено да се отличава? Означава вероятностите, макар и близки до предишните ситуации, все пак да са такива, че оптималната стратегия да бъде друга, в нашия конкретен разглеждан случай – това да бъде стратегия А1. Ако вероятностите изцяло произтичат от природата на неутралния противник, то граничните стойности за тези вероятности изцяло произтичат от платежната матрица и това разграничение е важно за разбирането на подобието или не на ситуациите. Напълно възможно е граничните стойности за вероятностите да бъдат подобни и тогава можем да твърдим, че платежните матрици са подобни, тъй като от техния анализ се получават подобни гранични стойности.

Възниква логично следната задача: да се определи минималния обем на извадката, при който можем да приемем, че получената оценка за вероятността не се отличава **значимо** от предполагаемата стойност 0,1, която ние „знаем“ от предишния ни опит. Ще подчертаем, че „значимо“ в случая не са традиционните 1%, 5% или 10% риск за грешка при проверката на хипотези, а дали дясната (в нашия случай) страна на интервала превишава или не критичната стойност, получена при анализа на платежната матрица при този минимален обем на извадката и при възприетия риск.

За пределната грешка Δ имаме следното уравнение (Елисеева, 2004):

$$\Delta = t.\sqrt{\frac{\sigma_{p_1}^2}{n}} \tag{21}$$

Където:

$\sigma_{p_1}^2$ е дисперсията на p_1,

n е търсеният обем на извадката,

t е нормираното отклонение при избраната доверителна вероятност, в нашия случай приблизително 3,09 (при изчисленията е използвана точната, а не закръглената стойност)

Решавайки горното уравнение за n ще получим следния израз:

$$n = \frac{t^2\sigma_{p_1}^2}{\Delta^2} \tag{22}$$

Тъй като пределната грешка се определя от граничната стойност 0,2 за p_1 и предполагаемата стойност от 0,1, тя е равна на 0,1.

Дисперсията на p_1 при предположението, че аналогично на предишните случаи извадковият относителен дял е равен на 0,1, е равна на 0,09. (за подобно доказателство на това, Елисеева, 2004).

Получава се n = 85,95 или закръглено до цяло число n = 86. Това е минималният размер на извадката и наистина, ако при тази извадка се получи честота за състоянието B1, съответстващо на p_1, по-ниска от 9, то пределната грешка ще се получи по-малка от 0,1. Така например, ако от 86 наблюдения в 8 случая неутралният противник е бил в състояние 1, то оценката на вероятността p_1 ще бъде 0,093 и съответно пределната грешка при тази извадка е 0,097, близка до 0,1, но все пак по-малка. Ако обаче честотата е 9, което при p_1= 0,1 и n = 86 е по-вероятно от 8, то тогава пределната грешка ще бъде равна на 0,102, и ще надвишава пределната стойност от 0,1.

Тук следва да подчертаем и разграничим, че ако изследвахме не вероятността p_1, а p_4, за която (напомняме) граничната стойност, за да бъде стратегия A4 доминираща беше 0,8, подобна пределна грешка не би представлявала никакъв проблем. Това е така, защото пределната грешка, определяна от граничната стойност 0,8 и предполагаемата вероятност p_4 = 0,1 е 0,7.

Ето така, при едни и същи вероятности от 0,1 (получени емпирично) пределната грешка на извадката от 0,102 ще има съвършено различни последици. В първия случай, когато изследваме вероятността p_1, ще се наложи да се увеличи обемът на извадката, за да се уточни дисперсията на оценката и съответно – на пределната грешка на извадката, а във втория това няма да е необходимо. Може да кажем, че в първия случай извадката е „на границата“ на обема, а във втория е достатъчно голяма, за да не се безпокоим за грешката, която ще допуснем, приемайки, че p_4 = 0,1. Дори да сгрешим 3 пъти и „истинската“ вероятност p_4 да е не 0,1, а цели 0,3, от това изводът, че стратегия A4 е доминирана изобщо няма да пострада и последиците от отхвърлянето на стратегия A4 като доминирана ще бъдат същите, каквито биха били, ако знаехме и „истинската“ вероятност.

Обемът на извадката и отговорът на въпроса дали той е голям или малък се определят от свойствата на платежната матрица, от които зависят граничните стойности на оценяваните вероятности и в крайна сметка – от решенията, които трябва да се вземат. Това е още един много важен резултат от направеното изследване, както с практическо, така и с теоретическо значение.

Да предположим, че честотата на състоянието B1 е 9. Тъй като оценката на p_1 от минималната извадка и при честота 9 на случаите е по-близа до граничната стойност 0,2, отколкото предполагаемото 0,1, ще се наложи увеличаване на извадката, за да се уточни отношението $\frac{\sigma_{p_1}^2}{n}$ и съответно – на пределната грешка на извадката. Новата извадка с минимален обем (закръглен нагоре до цяло число) ще бъде вече от 99 наблюдения.

Сега вече ако честотата на състоянието B1 е станала 10, това ще доведе до изменение на емпиричната оценка на p_1, но поради нарастване на обема на извадката пределната грешка на извадката ще бъде такава (0,0936), че пределната стойност на p_1 (стойността 0,2) ще бъде **извън** възприетия доверителен интервал.

Ако обаче честотата на състоянието B1 е станала 11, това няма да е така и отново ще се наложи увеличаване на обема на извадката, този път – до 120.

Както се вижда, обемът на извадката пряко следва от съображения, диктувани не от формални съображения, а от граничните вероятности, изведени при анализа на платежната матрица.

Изобщо, колкото по-близка е стойността на оценката на вероятността до граничната й стойност, толкова повече проблеми възникват пред нас. Увеличаването на обема на извадката не винаги е решение. Възможно е да не се отхвърли надеждно хипотезата, че граничната стойност лежи извън доверителния интервал и тогава не може да се изключи възможността дадената стратегия (както в случая става дума за A1) да бъде доминираща. Да не забравяме, че ако p_1 надхвърли 0,2, то стратегия A1 ще доминира строго всички останали и стойността 0,2 не зависи нито от обема на извадката, нито от получените честоти. В нашия пример оценката за p_1 беше равна на 0,1 и това дава надежди, че действителната стойност на тази вероятност не надминава 0,2. Но как да постъпим, ако оценката от самото начало беше примерно 0,19, независимо от това дали тя е получена от предишен наш опит, т.е. по аналогия или от някаква минимална извадка (например пилотно изследване)? От една страна, ако нашата извадка, след всички итерации по нейното увеличаване (стига това да е възможно), стане „достатъчно голяма“ и най-вече – ако е налице желанието непременно да се елиминира стратегия A1 като доминирана, то това може да се направи. Още повече, че формалните основания са налице – при достатъчно голяма извадка сме получили, че вероятността p_1 не надминава 0,2. Но все пак, от друга страна, остава значителен риск действителната вероятност да е над 0,2 и нищо не може да се направи, освен да се примирим с този риск.

Извадката не може да бъде увеличавана до безкрайност, защото някъде стоят група ограничения за това.

Първото естествено ограничение е бюджетът за такива изследвания. Този бюджет освен своята приемлива за организацията или лицето, взимащо решение граница има свой скрит предел, наричан „Очаквана Стойност на Перфектната Информация", ОСПИ (EVPI) и с увеличаването на обема на извадката или изобщо с оскъпяването на изследването (например, привличайки „по-велик експерт", който да ни каже дали една вероятност не е малко по-голяма от оценената от предишния експерт) ние стремително се приближаваме към тази цена.

Концепцията за ОСПИ (EVPI), при цялата си привлекателност, яснота и простота на приложение, има своите ограничения, както всеки показател, работещ с очаквани, т.е. изчислени от някакви точно определени вероятности величини. Тук ние не си поставяме за цел да разглеждаме подробно и да оценяваме тази концепция. Тя има своето място в инструментариума на взимане на решения. Ще кажем само, че тя работи успешно при условие, че знаем точните стойности на вероятностите, за да можем да изчислим ОСПИ (EVPI) също така точно. Това означава, че ние вече трябва да знаем вероятностите. А ако сме ги научили в резултат на скъпо изследване, което е струвало повече от получената в крайна сметка величина на ОСПИ (EVPI)? Ние просто ще сме заплатили цена за информация, която не ни е (поне) толкова полезна, измерено в пари, колкото ни е струвало нейното получаване и, следователно, поне от финансова гледна точка този разход е бил безсмислен.

Другото естествено ограничение е времето за получаване на „истинските" вероятности. Съществуват естествени процеси, в резултат на които се получават резултатите, които имат своето времетраене и които просто не могат да бъдат ускорявани с цел по-скоро да се получи голяма извадка.

Например, за да се получи минимално приемлива оценка за характеристиките на вятъра при взимането на решение дали да се инвестира или не в един ветропарк на дадена площадка, е необходимо на това място да се правят систематични измервания на тези характеристики в продължение на една, по-добре – на две години. Никакви други измервания някъде другаде по света няма да отразяват специфичното за мястото разпределение на вероятностите и взимането на решение на основание на приблизителното (теоретично) разпределение е свързано с рискове, произтичащи от локалните, неповторими специфики.

Определени изотопи се получават в изследователските реактори след някакво време на работа на реактора и при изследването на различни потенциални горивни смеси трябва да се изследват резултатите от множество горивни цикли, които могат да продължават години. Затова изследователските центрове координират своите планове за изследвания, за да може да се получават множество извадки-оценки за приемливо време, а не след десетилетия, ако всеки работи сам за себе си.

Списъкът от такива случаи може да бъде продължен.

Но има и по-трудни и рисковани ситуации, в които решение трябва да се вземе сега, на основата на информацията, с която разполагаме сега и не можем да чакаме да се появи нова, по-подробна информация.

Или информацията изобщо ще бъде получена едва след като се вземе решение, направят се определени инвестиции или се предприемат определени действия, поемат се определени рискове и обектът започне да работи.

„*Луната е твърдо тяло*“ *(подпис – Сергей Корольов)*.

Това е пример за взимане на решение на основата на наличната (и недостатъчна) информация при обсъждането на въпроса какво трябва да бъде шасито на първия в света спускаем апарат, изпратен от СССР на Луната. Трябва ли шасито да бъде приспособено за плуване във вода или да се движи по твърда повърхност или в още някаква среда (например подобна на пустиня)? Никакви астрономични наблюдения на естествения спътник, натрупани до дадения момент, не са били в състояние да дадат еднозначен отговор или да определят разпределението на вероятностите на възможните състояния на неутралния противник.

Получаването на „извадка“ преди изпращането на спускаемия апарат само по себе си е абсурд – за да се получи извадка, трябва да се изпратят множество спускаеми апарати. Но ако те вече са изпратени, то ще се знае и отговорът на въпроса.

Едва след изпращането на спускаем апарат, след като се поеме риска той да потъне или да се разбие, е бил получен и отговор на въпроса.

И благодарение на цитираната горе фраза и подписа на Главния конструктор върху лист, откъснат от бележник, днес всеки знае **достоверно**, че Луната е твърдо тяло.

Заключение

Платежната матрица в играта срещу неутрален противник не е просто таблица с числа. Тя съдържа ключова информация за определянето на интервалите, в които вероятностите на състоянията на неутралния противник определят една стратегия като доминирана или доминираща.

Анализът на платежната матрица ни помага да открием тези интервали и техните граници, за да може след това те да се съпоставят с получените по експериментален или експертен път оценки на вероятностите на състоянията.

Анализът на платежната матрица и получените от него граници на вероятностите на състоянията освобождават лицето, взимащо решение (участника в играта) от необходимостта да знае „точните“ вероятности на състоянията, за да приеме оптимално решение.

Вероятностите на състоянията, получени по експериментален или експертен път следва да се разглеждат само като оценки на истинските вероятности, оценени повече или по-малко надеждно, а не като неоспорима истина. Експериментално получените вероятности са точкови оценки, но много по-важно е да се знаят интервалите, в които могат да попадат тези оценки, без това да влияе върху взимането на оптимално решение.

Обстоятелството, че оценките на вероятностите не са точни не означава, че въз основа на тях не може да се приемат оптимални решения, стига тези вероятности да не са твърде близки до граничните си стойности, получени от анализа на платежната матрица. В определени случаи статистическите инструменти могат да дадат ценна информация за това, колко голям е рискът от приемането на хипотезата, че дадена вероятност определя съответната стратегия като доминирана или доминираща.

Получените от анализа граници на вероятностите могат да послужат за определяне на размерите на извадката, когато вероятностите ще се оценяват по експериментален път и служат за основа на планирането на експеримента.

Границите на вероятностите на състоянията структурират множеството от стратегиите на лицето, взимащо решение като подредба на стратегии и определят кои стратегии са близки една до друга в смисъла на възможност те да доминират останалите. При възможност именно тези стратегии да се използват като смесена стратегия, тя ще бъде оптималната смесена стратегия.

Използвана литература

Елисеева, И. И., Юзбашев, М. М. (2004). Общая теория статистики, 5-е изд., перераб. и доп., Елисеевой, И. И. (ред.), Финансы и статистика, Москва.

Коршунов, Ю. М. (1987). Математически основы кибернетики. 3-ье, перераб. и доп. ред., Энертоатомиздат, Москва.

Bonini, C. P., Hausman, W., Bierman, H. (1997). Quantitative Analysis for management. 9th ed., Irwin/McGraw Hill.

***

THE ANALYSIS OF THE PAYMENT MATRIX IN A GAME AGAINST A NEUTRAL OPPONENT

Assoc. Prof. Georgy Kiranchev, PhD
Marketing and Strategic Planning Department
Faculty of Management and Administration
University of National and World Economy
e-mail: g.kiranchev@unwe.bg

Abstract

The study discusses the topic of playing against a neutral (unreasonable) opponent and evaluating his mixed strategy. The goal is to prove the importance of the emphasis in such games on the analysis of the payment matrix. The task is to demonstrate the possibilities of this analysis in choosing the optimal strategy against a neutral opponent.

The methodology of the mathematical proof and the testing of statistical hypotheses were used. It has been proven that it is sufficient for the probabilities to fall within the boundaries within which the conditions for dominance are met. It has been proven that the analysis (of the payment matrix) provides information about the limits within which the empirically obtained probabilities of the states are reliable estimates of the real probabilities. The sources for obtaining the mixed strategy of the player are evaluated. The use of analytically obtained limits for estimating empirically obtained probabilities with the tools for testing statistical hypotheses is considered. The approach is recommended when choosing a strategy in situations where changing the strategy afterwards is either impossible or too expensive.

The proposed analysis has a high practical utility for all persons making strategic decisions in the conditions of a game against a neutral opponent. The conclusion is that only on the basis of this analysis can an optimal strategy be selected, insensitive to the inaccuracy of the mixed strategy of the opponent.

Key words: game theory, games, mixed strategy, optimal strategy

JEL: C72, C73